Solusi Sistem Persamaan Lanjar (Bagian 2)

Bahan Kuliah IF4058 Topik Khusus Informatika I

Oleh; Rinaldi Munir (IF-STEI ITB)

Pemfaktoran dengan Metode Reduksi Crout

- Meskipun metode *LU* Gauss dikenal paling baik untuk melakukan dekomposisi *LU*, terdapat metode lain yang digunakan secara luas, yaitu metode reduksi Crout
- Nama lain: **metode reduksi Cholesky** atau **metode *Dolittle***

Dalam membahas metode reduksi Crout, tinjau matriks 3×3 berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{2,2} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Karena $LU = A$, maka hasil perkalian L dan U itu dapat ditulis sebagai

$$LU = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23} \\ l_{31}u_{13} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix} = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dari kesamaan dua buah matriks $LU = A$, diperoleh

$$\left. u_{11} = a_{11}, \quad u_{12} = a_{12}, \quad u_{13} = a_{13} \right\} \quad \text{Baris pertama } U$$

$$\left. \begin{aligned} l_{21}u_1 &= a_{21} \quad \rightarrow \quad l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} \\ l_{31}u_{11} &= a_{31} \quad \rightarrow \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} \end{aligned} \right\} \quad \text{Kolom pertama } L$$

$$\left. \begin{aligned} l_{21}u_{12} + u_{22} &= a_{22} \quad \rightarrow \quad u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} \\ l_{21}u_{13} + u_{23} &= a_{23} \quad \rightarrow \quad u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} \end{aligned} \right\} \quad \text{Baris kedua } U$$

$$l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = a_{32} \rightarrow \qquad l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}}$$ Kolom kedua L

$$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = a_{33} \rightarrow \quad u_{33} = a_{33} - (l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23}) \quad \}$$ Baris ketiga U

Kita perhatikan ada urutan pola teratur dalam menemukan elemen-elemen *L* dan *U*, yaitu:

(1)elemen-elemen baris pertama dari *U*
(2)elemen-elemen baris pertama dari *L*
(3)elemen-elemen baris kedua dari *U*
(4)elemen-elemen baris kedua *L*
(5)…
(6)elemen-elemen baris ke-*k* dari *U*
(7)elemen-elemen baris ke-*k* dari *L*

Rumus umum menghitung u dan l untuk sistem dengan matriks A yang berukuran 3×3 dapat ditulis sebagai berikut:

$$u_{pj} = a_{pj} - \sum_{k=1}^{p-1} l_{pk}\, u_{kj}, \qquad \begin{array}{l} p = 1, 2, 3, \ldots, n \\ j = p, p+1, \ldots, n \end{array} \qquad \text{(P.4.13)}$$

dan

$$l_{iq} = \frac{a_{iq} - \sum_{k=1}^{q-1} 1_{ik}\, u_{kq}}{u_{qq}} \quad , \quad \begin{array}{l} q = 1, 2, 3, \ldots, n\text{-}1 \\ i = q+1, q+2, \ldots, n \\ \text{dengan syarat } u_{qq} \neq 0 \end{array} \qquad \text{(P.4.14)}$$

Contoh: Selesaikan

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\
2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\
-x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5
\end{aligned}
$$

dengan metode dekomposisi *LU*, yang dalam hal ini *L* dan *U* dihitung dengan metode reduksi Crout.

Penyelesaian:

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Diperoleh:

$$
\begin{aligned}
u_{11} &= a_{11} = 1 \\
u_{12} &= a_{12} = 1 \\
u_{13} &= a_{13} = -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_{21} &= a_{21}/u_{11} = 2/1 = 2 \\
l_{31} &= a_{31}/u_{11} = -1/1 = -1
\end{aligned}
$$

$$
u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 2 - 2 \cdot 1 = 0
$$

Karena u_{qq} tidak boleh nol, lakukan pertukaran baris, baik untuk matriks A maupun untuk vektor b:

Matriks A	Vektor b
$R_2 \Leftrightarrow R_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$R_2 \Leftrightarrow R_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

Hitung kembali nilai l_{21} , l_{31} , dan u_{22} (Perhatikan bahwa nilai u_{11}, u_{12}, u_{13} tidak berubah)

$$l_{21} = a_{21}/u_{11} = -1/1 = -1$$
$$l_{31} = a_{31}/u_{11} = 2/1 = 2$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 1 - (-1)(1) = 1 + 1 = 2$$
$$u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = 1 - (-1)(-1) = 1\text{-}1 = 0$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} = \frac{2 - 2(1)}{2} = 0$$

Diperoleh L dan U sebagai berikut,

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Berturut-turut dihitung y dan x sebagai berikut:

$$Ly = b \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

y_1, y_2, dan y_3 dihitung dengan teknik penyulihan maju:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ -y_1 + y_2 &= 1 \quad \rightarrow \quad y_2 = 1 + y_1 = 1 + 1 = 2 \\ 2y_1 + 0y_2 + y_3 &= 5 \quad \rightarrow \quad y_3 = 5 - 2y_1 = 3 \end{aligned}$$

$$Ux = y \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

x_1, x_2, dan x_3 dihitung dengan teknik penyulihan mundur:

$$\begin{array}{lll} 3x_3 & = 3 & \rightarrow x_3 = 1 \\ 2x_2 + 0x_3 & = 2 & \rightarrow x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = 1 & \rightarrow x_1 = 1 \end{array}$$

Jadi, solusi sistem persamaan lanjar di atas adalah $x = (1, 1, 1)^T$.

- Jika diamati elemen segitiga bawah pada matriks *U* semuanya bernilai nol, sehingga ruang yang tidak terpakai itu dapat dipakai untuk menyimpan elemen matriks *L*.
- Elemen diagonal matriks *L* seluruhnya 1, jadi tidak perlu disimpan (*default*). Dengan demikian, penyimpanan elemen *L* dan *U* pada satu matriks dapat menghemat penggunaan memori.
- Selain itu, matriks *A* hanya dipakai sekali untuk memperoleh *L* dan *U*, sesudah itu tidak dipakai lagi.
- Dengan demikian, setelah *L* dan *U* diperoleh, elemennya dapat dipindahkan ke dalam *A*.
- Karena alasan ini, maka metode dekomposisi *LU* dinamakan juga metode kompaksi memori.

Determinan

- Metode eliminasi Gauss dapat diterapkan untuk menghitung determinan matriks $n \times n$.
- Determinannya dapat dihitung setelah ia ditransformasi menjadi matriks segitiga atas U.
- Dua hukum penting determinan:

Hukum 1: $\det(BC) = \det(B) \times \det(C)$

Hukum 2: $\det(M)$ = hasil kali semua elemen diagonal M jika M adalah matriks segitiga atas atau matriks segitiga bawah.

Kasus 1: Bila eliminasi Gauss tidak menerapkan tatancang *pivoting*.

- Jika *pivoting* tidak diterapkan, determinan matriks A adalah:

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \det(LU) \\
&= \det(L) \times \det(U) \\
&= \det(U) \\
&= u_{11}\, u_{22}\, u_{33} \ldots u_{nn}
\end{aligned}
$$

- yang dalam hal ini $\det(L) = 1$ sebab semua elemen diagonal L adalah satu.

Kasus 2: Bila eliminasi Gauss menerapkan tatancang *pivoting*.

- Tatancang *pivoting* mengakibatkan pertukaran baris. Dekomposisi LU dengan *pivoting* setara dengan mengerjakan dua proses terpisah berikut:
  1. Transformasikan matriks A menjadi matriks A' dengan cara permutasi baris-baris matriks (sama dengan mengalikan A dengan matriks permutasi P),

     $A' = PA$ atau setara dengan $A = P^{-1} A'$

  2. Dekomposisi A' menjadi LU tanpa *pivoting*

     $A' = LU$

- Dari (1) dan (2), L dan U dihubungkan dengan A oleh

$$A = P^{-1} A' = P^{-1} LU$$

- Determinan A dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(P^{-1}) \times \det(L) \times \det(U) \\ &= \det(P^{-1}) \times 1 \times \det(U) \\ &= \det(P^{-1}) \times \det(U) \\ &= \alpha \det(U) \end{aligned}$$

yang dalam hal ini $\alpha = \det(P^{-1}) = -1$ atau 1 bergantung pada apakah *pivoting* sejumlah bilangan ganjil atau genap.

- Jika *pivoting* dilakukan sejumlah *p* kali, maka α dapat ditulis sebagai:

$$\alpha = (-1)^p$$

- α bernilai 1 untuk *p* genap dan -1 untuk *p* ganjil. Karena itu,

$$\det(A) = (-1)^p \det(U) = (-1)^p\ u_{11}\ u_{22}\ u_{33}\ \ldots\ u_{nn}$$

- Contoh: Hitung determinan matriks *A* berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 - {}^{4}/_{2}\, R_1 \\ R_3 - {}^{-2}/_{2}\, R_1 \\ \ \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_3 - {}^{6}/_{-2}\, R_2 \\ \ \\ \ \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Tidak ada proses *pivoting* selama eliminasi Gauss, maka

det (A) = (2) (-2) (-5) = 20

Metode Lelaran Untuk Menyelesaikan SPL

- Metode eliminasi Gauss melibatkan banyak galat pembulatan. Galat pembulatan yang terjadi pada eliminasi Gauss dapat menyebabkan solusi yang diperoleh “jauh” dari solusi sebenarnya.

- Gagasan metoda lelaran pada pencarian akar persamaan nirlanjar dapat juga diterapkan untuk menyelesaikan SPL.

- Dengan metode lelaran, galat pembulatan dapat diperkecil, karena kita dapat meneruskan lelaran sampai solusinya seteliti mungkin, sesuai dengan batas galat yang kita perbolehkan.

- Dengan kata lain, besar galat dapat dikendalikan sampai batas yang bisa diterima

- Jika metode eliminasi Gauss dan variasi-variasinya serta metode dekomposisi *LU* dinamakan **metode langsung** (*direct*) -karena solusi SPL diperoleh tanpa lelaran-

- maka metode lelaran dinamakan **metode tidak langsung** (*indirect*) atau **metode iteratif**.

- Tinjau kembali sistem persamaan lanjar

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

- Dengan syarat $a_{kk} \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, maka persamaan lelarannya dapat ditulis sebagai

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{k} .... - a_{1n}x_n^{(k)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - ....a_{2n}x_n^{(k)}}{a_{22}}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - .... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}}{a_{nn}}$$

dengan $k = 0, 1, 2, \ldots$

Lelaran dimulai dengan memberikan tebakan awal untuk *x*,

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

Sebagai kondisi berhenti lelarannya, dapat digunakan pendekatan galat relatif

$$\left| \frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k+1)}} \right| < \varepsilon \qquad \text{untuk } \underline{\text{semua}}\ i = 1, 2, 3, \ldots., n$$

Syarat cukup agar lelarannya konvergen adalah sistem **dominan secara diagonal**:

$$| a_{ii} | > \sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} \left| a_{ij} \right| \qquad , i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Sebagai contoh, SPL berikut

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 5 \\ -x_1 + 5x_2 + 8x_3 &= 5 \end{aligned}$$

dominan secara diagonal, karena

$$|3| > |1| + |-1|$$

$$|4| > |2| + |1|$$

$$|8| > |-1| + |5|$$

karena itu lelarannya pasti konvergen.

Ada dua metode lelaran yang akan kita bahas di sini:

1. Metode lelaran Jacobi
2. Metode lelaran Gauss-Seidel

Metode Lelaran Jacobi

- Persamaan lelarannya adalah seperti yang ditulis di atas.

- Misalkan diberikan tebakan awal $x^{(0)}$:

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})^T$$

- Prosedur lelaran untuk lelaran pertama, kedua, dan seterusnya adalah sebagai berikut:

Lelaran pertama:

$$x_1^{(1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)} - .... - a_{1n}x_n^{(0)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - a_{23}x_3^{(0)} - .... - a_{2n}x_n^{(0)}}{a_{22}}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(1)} = \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(0)} - a_{n2}x_2^{(0)} - .... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(0)}}{a_{nn}}$$

Lelaran kedua:

$$x_1^{(2)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(1)} - a_{13}x_3^{(1)} - .... - a_{1n}x_n^{(1)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(1)} - .... - a_{2n}x_n^{(1)}}{a_{22}}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(2)} = \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(1)} - a_{n2}x_2^{(1)} - .... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(1)}}{a_{nn}}$$

Rumus umum :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}, k = 0,1,2,....$$

Metode Lelaran Gauss-Seidel

- Kecepatan konvergen pada lelaran Jacobi dapat dipercepat bila setiap harga x_i yang baru dihasilkan segera dipakai pada persamaan berikutnya untuk menentukan harga x_{i+1} yang lainnya.

- Metode lelarannya dinamakan lelaran Gauss-Seidel

Lelaran pertama:

$$x_1^{(1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)} - a_{14}x_4^{(0)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{b_1 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)} - a_{24}x_4^{(0)}}{a_{22}}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)} - a_{34}x_4^{(0)}}{a_{33}}$$

$$x_4^{(1)} = \frac{b_4 - a_{41}x_1^{(1)} - a_{42}x_2^{(1)} - a_{43}x_3^{(1)}}{a_{44}}$$

Lelaran kedua:

$$x_1^{(2)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(1)} - a_{13}x_3^{(1)} - a_{14}x_4^{(1)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{b_1 - a_{21}x_1^{(2)} - a_{23}x_3^{(1)} - a_{24}x_4^{(1)}}{a_{22}}$$

$$x_3^{(2)} = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{(2)} - a_{32}x_2^{(2)} - a_{34}x_4^{(1)}}{a_{33}}$$

$$x_4^{(2)} = \frac{b_4 - a_{41}x_1^{(2)} - a_{42}x_2^{(2)} - a_{43}x_3^{(2)}}{a_{44}}$$

Rumus umum:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}, k = 0,1,2,....$$

- **Contoh**: Tentukan solusi SPL

$4x - y + z = 7$

$4x - 8y + z = -21$

$-2x + y + 5z = 15$

dengan nilai awal $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 2)$. (Solusi sejatinya adalah (2, 4, 3))

Penyelesaian:

(a) Metode lelaran Jacobi
Persamaan lelarannya:

$$x_{r+1} = \frac{7 + y_r - z_r}{4}$$

$$y_{r+1} = \frac{21 + 4x_r - z_r}{8}$$

$$z_{r+1} = \frac{15 + 2x_r - y_r}{5}$$

Lelarannya:

$$x_1 = \frac{7 + 2 - 2}{4} = 1.75$$

$$y_1 = \frac{21 + 4(1) + 2}{8} = 3.375$$

$$z_1 = \frac{15 + 2(1) - 2}{5} = 3.000$$

$$x_2 = \frac{7 + 3.375 - 3.00}{4} = 1.84375$$

$$y_2 = \frac{21 + 4(3.375) - 3.00}{8} = 3.875$$

$$z_2 = \frac{15 + 2(1.75) - 3.375}{5} = 3.025$$

...

$x_{19} = 2.00000000$
$y_{19} = 4.00000000$
$z_{19} = 3.00000000$

(b) Metode lelaran Gauss-Seidel

Persamaan lelarannya,

$$x_{r+1} = \frac{7 + y_r - z_r}{4}$$

$$y_{r+1} = \frac{21 + 4x_r - z_r}{8}$$

$$z_{r+1} = \frac{15 + 2x_r - y_r}{5}$$

Lelarannya,

$$x_1 = \frac{7 + 2 - 2}{4} = 1.75$$

$$y_1 = \frac{21 + 4(1.75) + 2}{8} = 3.75$$

$$z_1 = \frac{15 + 2(1.75) - 3.75}{5} = 3.000$$

$$x_2 = \frac{7 + 3.75 - 2.95}{4} = 1.95$$

$$y_2 = \frac{7 + 3.75 - 2.95}{8} = 3.96875$$

$$z_2 = \frac{15 + 2(1.95) - 3.968375}{5} = 2.98625$$

...

$x_{10} = 2.00000000$
$y_{10} = 4.00000000$
$z_{10} = 3.00000000$

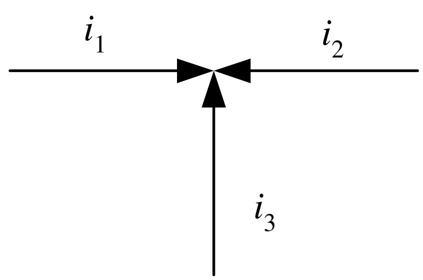
Jadi, solusi SPL adalah x = 2.00000000, y = 4.00000000, z = 3.00000000

Contoh Soal Terapan

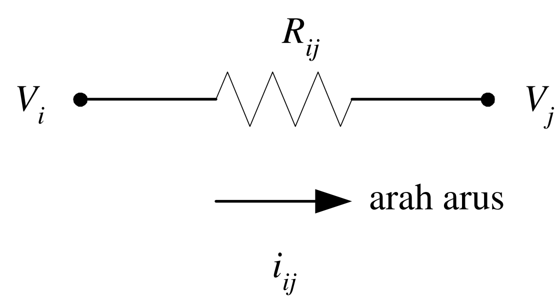
Dalam hal ini, semua arus i yang memasuki simpul dianggap bertanda positif. Sedangkan hukum Ohm menyatakan bahwa arus i yang melalui suatu tahanan adalah :

$$i_{ij} = \frac{V_i - V_j}{R_{ij}}$$

yang dalam hal ini V adalah tegangan dan R adalah tahanan.

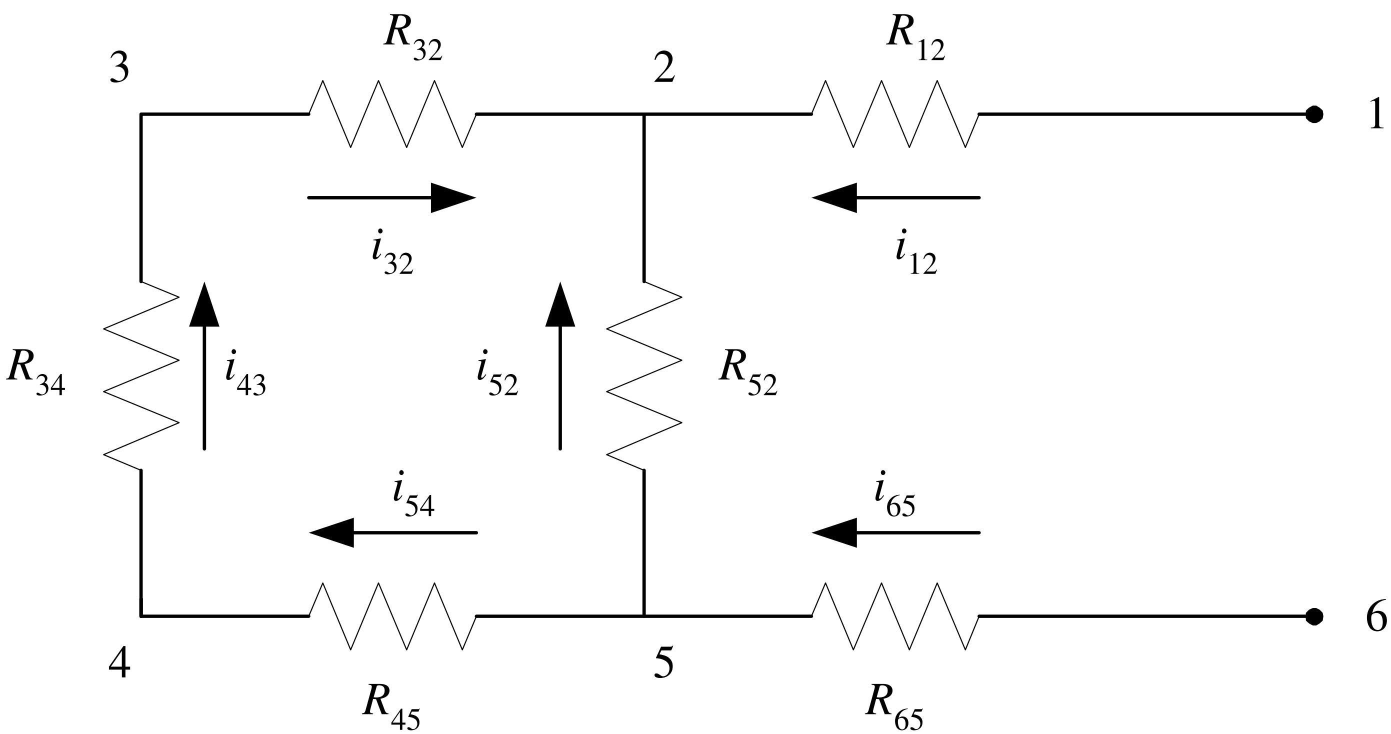


(a)



(b)

Diberikan sebuah rangkaian listrik dengan 6 buah tahanan seperti pada Gambar di bawah ini. Anda diminta menghitung arus pada masing-masing rangkaian.



Penyelesaian: Arah arus dimisalkan seperti diatas. Dengan hukum Kirchoff diperoleh persamaan-persamaan berikut :

$$
\begin{aligned}
&i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0 \\
&i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0 \\
&i_{43} - i_{32} = 0 \\
&i_{54} - i_{43} = 0
\end{aligned}
$$

Dari hukum Ohm didapat :

$$
\begin{aligned}
&i_{32} R_{32} - V_3 + V_2 = 0 \\
&i_{43} R_{43} - V_4 + V_3 = 0 \\
&i_{65} R_{65} + V_5 = 0 \\
&i_{12} R_{12} + V_2 = 0 \\
&i_{54} R_{54} - V_5 + V_4 = 0 \\
&i_{52} R_{52} - V_5 + V_2 = 0
\end{aligned}
$$

Dengan menyusun kesepuluh persamaan diatas didapatkan SPL sbb :

$$
\begin{array}{cccccccccc}
i_{12} & i_{52} & i_{32} & i_{65} & i_{54} & i_{43} & V_2 & V_3 & V_4 & V_5
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & R_{32} & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{43} & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & R_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
R_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & R_{54} & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & R_{52} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_6 \\ V_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Tentukan

$$i_{12}\ ,\quad i_{52}\ ,\quad i_{32}\ ,\quad i_{65}\ ,\quad i_{54}\ ,\quad i_{13}\ ,\quad V_2\ ,\quad V_3\ ,\quad V_4\ ,\quad V_5$$

bila diketahui

$R_{12} = 5$ ohm , $R_{52} = 10$ ohm , $R_{32} = 10$ ohm
$R_{65} = 20$ ohm , $R_{54} = 15$ ohm , $R_{14} = 5$ ohm.
$V_1 = 200$ volt , $V_6 = 0$ volt.

Persoalan ini diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss. Matriks awal sebelum proses eliminasi Gauss adalah:

$$
\left[\begin{array}{cccccccccc|c}
1.000 & 1.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\
0.000 & -1.000 & 0.000 & 1.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\
0.000 & 0.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\
0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\
0.000 & 0.000 & 10.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\
0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 5.000 & 0.000 & 1.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 \\
0.000 & 0.000 & 0.000 & 20.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 \\
5.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 200.000 \\
0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 15.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & -1.000 & 0.000 \\
0.000 & 10.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & -1.000 & 0.000
\end{array}\right]
$$

Matriks akhir setelah eliminasi adalah:

$$\left[\begin{array}{cccccccccc|c}
1.000 & 1.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\
0.000 & -1.000 & 0.000 & 1.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\
0.000 & 0.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\
0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & -1.000 & 0.000 & 0.100 & 0.000 & 0.000 & -0.100 & 0.000 \\
0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\
0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.200 & -0.200 & 0.000 & 0.000 \\
0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.100 & -0.200 & 0.200 & 0.150 & 0.000 \\
0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.600 & 0.600 & 0.350 & 40.000 \\
0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.100 & 0.025 & 20.000 \\
0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.200 & -26.667
\end{array}\right]$$

Dengan teknik penyulihan mundur diperoleh solusinya sebagi berikut:

$i12$ = 4.444 ampere, $i52$ = -4.444 ampere
$i32$ = 0.000 ampere, $i65$ = -6.667 ampere
$i54$ = -2.222 ampere, $i43$ = -2.222 ampere
$V2$ = 177.778 volt, $V3$ = 177.778 volt
$V4$ = 166.667 volt, $V5$ = 133.333 volt